Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра компьютерных технологий и систем управления

Згурская Вероника Станиславовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

О редуцированности решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями

Направление 010302

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Тарашнина С.И.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение

В данной работе рассматриваются кооперативные игры с трансферабельными полезностями[1], или, иначе, ТП-игры. Кооперативная теория игр допускает совместные действия игроков и формирование коалиций. Основное предположение в теории кооперативных игр состоит в том, что максимальная коалиция — то есть группа, состоящая из всех игроков — будет сформирована. Таким образом, основной задачей в теории кооперативных игр является решение вопроса о том, каким образом следует распределить выигрыш максимальной коалиции между игроками.

На данный момент существует множество решений, основывающихся на том или ином правиле, по которому может быть распределен общий выигрыш. Такими решениями являются, например, C-ядро [1], пред-K-ядро [2], N-ядро, пред-N-ядро [3], вектор Шепли [4]. Все они обладают различными свойствами, позволяющими осознавать, как себя ведет то или иное решение в реальной ситуации. Однако, так как для различных решений могут выполняться одинаковые свойства, необходимо найти такой набор свойств, с помощью которого можно однозначно определить то или иное решение. Для всех вышеприведенных решений существует как минимум одна аксиоматизация [5].

В 2011 г. С. И. Тарашниной [6] была представлена новая концепция решения кооперативной ТП-игры, основанная на принципе равного учета конструктивной и блокирующей сил коалиции, то есть той величины, которую коалиция может себе гарантировать, и той, получению которой не может препятствовать ее комплементарная коалиция, соответственно, — SM-ядро. В том же году Н. В. Смирновой и С. И. Тарашниной [7] была введена концепция решения, представляющего собой обобщение SM-ядра, — [0,1]-N-ядро, которое учитывает произвольные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции. В данных работах было показано, что представленные решения удовлетворяют множеству свойств. Однако, как для [0,1]-N-ядра, так и для SM-ядра еще не было определено, какие свойства могут послужить их однозначной характеризации. Ввиду этого существует необходимость проверки справедливости как минимум существующих

[1] Т.е. полезностями, линейными в денежном эквиваленте

свойств для данный решений.

Так как определения [0,1]-N-ядра и его частного случая — SM-ядра — тесно связаны с определением пред-N-ядра, было бы разумным сначала проверить справедливость тех свойств, которые участвуют в аксиоматизации пред-N-ядра. Одним из таких свойств является свойство согласованности (RGP) по Дэвису-Машлеру [8] [9]. Данное свойство имеет следующую интерпретацию: если несколько игроков покинут игру (N, v), и оставшиеся игроки разыграют игру в редуцированной форме, то распределение выигрыша для них будет согласовываться с распределением выигрыша для всех игроков в исходной игре, то есть будет определяться по тому же правилу.

Ввиду того, что [0,1]-N-ядро, как будет показано ниже, состоит из множества точек при различных $\alpha \in [0, 1]$ (SM-ядро является его частным случаем при $\alpha = \frac{1}{2}$), для полноты исследования имеет смысл проверить еще одно свойство согласованности для одноточечных решений, участвующее в аксиоматизации вектора Шепли, но имеющее интерпретацию, аналогичную свойству согласованности по Дэвису-Машлеру, — свойство согласованности (CON) по Харту-Мас-Колеллу [10].

Работа структурирована следующим образом. В главе 1 приводятся основные определения и свойства, а также дается характеристика исследуемых решений. В главе 2 приведен используемый метод нахождения исследуемых решений, а также проводится анализ справедливости свойств согласованности по Дэвису-Машлеру и по Харту-Мас-Колеллу для [0,1]-N-ядра при помощи реализованного программного обеспечения и найденных с его помощью контрпримеров.

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается кооперативная ТП-игра n лиц и исследуется справедливость свойств согласованности (RGP)[2] по Дэвису-Машлеру и согласованности (CON)[3] по Харту-Мас-Колеллу для [0,1]-N-ядра, а также SM-ядра. На основе полученных результатов должен быть сделан вывод о возможности аксиоматизации исследуемых решений при помощи данных свойств.

Известно, что [0,1]-N-ядро состоит из множества точек, называемых α-N-ядрами, $\alpha \in [0,1]$. Из определений свойств согласованности (приведены в основной части работы) следует, что проверка выполнения RGP имеет смысл как для одноточечных, так и для многоточечных решений, в то время как проверка выполнения CON — лишь для одноточеных. Таким образом, для α-N-ядра, $\alpha \in [0,1]$, и SM-ядра имеет смысл проверка выполнения свойства согласованности как по Харту-Мас-Колеллу, так и по Дэвису-Машлеру, тогда как для [0,1]-N-ядра имеет смысл лишь проверка выполнения свойства согласованности по Дэвису-Машлеру.

Так как задача проверки выполнения RGP для многоточечного решения не является тривиальной, для начала необходимо проверить выполнение этого свойства для α-N-ядра при параметре α, варьируемом в интервале от 0 до 1 (то есть для каждой точки, принадлежащей [0,1]-N-ядру). Если данная поверка даст отрицательный результат, необходимо попытаться найти способ выполнить проверку свойства для многоточечного решения в целом.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

— реализовать программное обеспечение, позволяющее вычислять α-N-ядро для любого α, $\alpha \in [0,1]$;

— реализовать программное обеспечение, строящее редуцированные игры по Дэвису-Машлеру и Харту-Мас-Колеллу для α-N-ядра для для любого α, $\alpha \in [0,1]$;

[2]В англоязычной литературе Reduced Game Property

[3]В англоязычной литературе Consistency

— проверить выполнение свойств согласованности по Дэвису-Машлеру и Харту-Мас-Колеллу для α-N-ядра для для любого α, $\alpha \in [0, 1]$, и SM-ядра;

— попытаться произвести проверку свойства согласованности по Дэвису-Машлеру для [0,1]-N-ядра;

— Сделать вывод о возможности аксиоматизации [0,1]-N-ядра и SM-ядра с помощью данных свойств.

Обзор литературы

В кооперативной теори игр наиболее известными решениями являются C-ядро [1], пред-K-ядро [2], N-ядро, пред-N-ядро [3], вектор Шепли [4].

Понятие редуцированных игр на классе кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП-игр) было впервые введено и исследовано Дэвисом и Машлером [11].

Первое систематическое исследование свойства согласованности, как оно было введено Дэвисом и Машлером, было представлено Ауманном и Дрезом [12]. Ими было доказано, что С-ядро обладает данным свойством. Позже Соболев [8] представил аксиоматизацию пред-N-ядра при помощи данного свойства. Пелегом [9] было дано общее определение свойства согласованности по Дэвису-Машлеру для многоточечных решений и доказана его справедливость для пред-K-ядра и С-ядра.

Долгое время понятие свойства согласованности существовало лишь в определении по Дэвису-Машлеру. Данное свойство ценилось на практике, так как гарантировало игрокам некоторую "стабильность"решения, обеспечивая его согласованность с их ожиданиями выигрыша. Например, Ауманн и Машлер в работе [13] исследовали различные приложения свойства согласованности N-ядра в играх банкротства.

Однако одно из самых известных и востребованных решений кооперативных игр — вектор Шепли — не удовлетворяло свойству согласованности по Дэвису Машлеру. Тогда Хартом и Мас-Колеллом [10] было введено новое понятие редуцированной игры и свойства согласованности для этой игры, а также было предложена новая аксиоматизация вектора Шепли при помощи данного свойства. Это свойство принято называть свойством согласованности по Харту-Мас-Колеллу.

Сравнительно недавно Н. В. Смирновой и С. И. Тарашниной [7] и С. И. Тарашниной [6] были предложены новые концепции решений кооперативных ТП-игр — [0,1]-N-ядро и SM-ядро. Идея решений, явным образом учитывающих конструктивную и блокирующую силу коалиции $S \subseteq N$, была основана на решении, представленном Зюдхолтером [14] — модифицированном N-ядре. Однако решения Н. В. Смирновой и С. И. Тарашниной имеют перед ним то преимущество, что, будучи тесно связанными с определением пред-N-ядра, обладают меньшей вычислительной сложностью, чем модифицированном N-ядро, а также позволяют учитывать произвольные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции.

Хотя для [0,1]-N-ядра и SM-ядра была доказана справедливость многих свойств [6][7][15], данные решения до сих пор не были аксиоматизированы. На основании связи определений [0,1]-N-ядра и SM-ядра и пред-N-ядра было бы логично проверить справедливость свойств, использующихся в аксиоматизации пред-N-ядра Соболевым, для решений, предложенных Н. В. Смирновой и С. И. Тарашниной. Особый интерес ввиду своей практической ценности представляет свойство согласованности по Дэвису-Машлеру.

Таким образом, в данной работе продолжается исследование свойства согласованности по Дэвису-Машлеру, однако в этот раз в контексте его справедливости для [0,1]-N-ядра и SM-ядра с целью последующей аксиоматизации данных решений. Также для этих решений проводится проверка выполнения свойства согласованности по Харту-Мас-Колеллу.

При написании работы главным образом использовалась книга Пелега и Зюдхолтера [5], авторами которой были систематически представлены все основные решения, находящие применение в теории кооперативных игр, а также их аксиоматизации согласно упомянутым выше работам.

Глава 1. Кооперативная теория игр

1.1 Основные понятия и определения

1.1.1 Определение кооперативной игры

Пусть N - конечное множество *игроков*. *Коалицией* будем называть непустое подмножество множества N.

Определение 1.1.1. ***Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями*** *(ТП-игрой) будем называть пару (N, v), где N - это множество игроков и v - это функция, которая любому подмножеству $S \subseteq N$ ставит в соответствие вещественное число $v(S)$, при этом мы полагаем, что $v(\emptyset) = 0$.*

Пусть $G = (N, v)$ — кооперативная игра. Тогда v называется *характеристической функцией* игры G.

В кооперативной игре с трансферабельными полезностями допускается кооперация игроков и перераспределение выигрышей. Таким образом, если коалиция S будет сформирована, она может распределить величину $v(S)$ между членами коалиции любым возможным способом.

Предполагается, что формирование максимальной коалиции N позволит добиться не только максимального суммарного выигрыша, но и наилучшего результата для каждого игрока. При этом, в теории кооперативных игр решается вопрос не о том, как получить максимальный суммарный выигрыш, а о том, каким образом распределить полученный выигрыш между игроками.

Стоит также отметить, что игра (N, v) однозначно определяется своей характеристической функцией v.

Приведем здесь некоторые определения, характеризующие различные классы игр, которые будут в дальнейшем упоминаться в данной работе.

Определение 1.1.2. *Игра $G = (N, v)$ называется игрой с* ***постоянной суммой****, если $v(S) + v(N \backslash S) = v(N) \quad \forall S \subseteq N$.*

Определение 1.1.3. *Игра $G = (N, v)$ называется **0-редуцированная**, если $v(\{i\}) = 0$ для любого $i \in N$.*

Определение 1.1.4. *Игра $G = (N, v)$ называется **0-монотонной**, если для всех $S, T \subset N$, когда $S \subset T$, выполняется $v(S) - \sum\limits_{i \in S} v(\{i\}) \leqslant v(T) - \sum\limits_{i \in T} v(\{i\})$.*

Приведенные выше определения даны в соответствии с монографией фон Неймана и Моргенштерна [16].

1.1.2 Основные свойства решений

Пусть N — конечное множество всех игроков. Обозначим за G^N множество всех игр (N, v) с фиксированным количеством игроков N. Предполагая, что все игроки сформировали максимальную коалицию N, рассмотрим задачу распределения максимального суммарного выигрыша $v(N)$ между игроками. Обозначим за $X^*(N, v)$ множество *допустимых векторов выигрышей* игры (N, v), такое что

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R} \mid x(N) \leq v(N)\}, \quad \text{где } x(S) = \sum_{x \in S} x_i, S \subseteq N.$$

Определение 1.1.5. ***Решением** на множестве игр G^N называется функция σ, которая каждой игре $(N, v) \in G^N$ ставит в соответствие подмножество $\sigma(N, v)$ из $X^*(N, v)$.*

Самыми известными решениями в теории кооперативных игр являются С-ядро, N-ядро и вектор Шепли. Каждое из решений определено поразному, исходя из различных представлений о рациональном распределении выигрыша. Таким образом, так как при применении различных решений распределения могут отличатся, встает вопрос о том, какое решение использовать в том или ином случае. Рассмотрим сначала основные свойства решений.

Для начала введем следующее определение:

Определение 1.1.6. *Множеством* ***эффективно-рациональных (Парето-оптимальных)*** *векторов выигрышей называется множество* $X^0(N, v)$*:*

$$X^0(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}.$$

Пусть σ - решение на множестве игр G^N. Будем говорить, что оно удовлетворяет свойствам:

1. **Ковариантности относительно стратегически эквивалентных преобразований (COV)**, если из $(N, v), (N, w) \in G^N, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^N$, и $w(S) = \alpha v(S) + \beta(S)$ для любой коалиции $S \subseteq N$ следует, что $\sigma(N, w) = \alpha\sigma(N, v) + \beta$.

2. **Анонимности (AN)**, если из $(N, v) \in G^N$, перестановка $\pi : N \to N$ и $(\pi(N), \pi v) \in G^N$ следует, что $\sigma(\pi(N), \pi v) = \pi(\sigma(N, v))$.

3. **Групповой рациональности (оптимальности по Парето) (PO)**[4], если $\sigma(N, v) \subseteq X^0(N, v)$ для $\forall$ игры $(N, v) \in G^N$.

4. **Индивидуальной рациональности (IR)**, если из $(N, v) \in G^N$ и $x \in \sigma(N, v)$ следует, что $x_i \geq v(\{i\})$.

5. **Супераддитивности (SUPA)**, если $\sigma(N, v_1) + \sigma(N, v_2) \subseteq \sigma(N, v_1 + v_2)$, когда $(N, v_1), (N, v_2), (N, v_1 + v_2) \in G^N$.

6. **Обоснованности (RE)**, если из

$$((N, v) \in G^N \text{ и } x \in \sigma(N, v)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_i \leq \max\limits_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) & \text{для } \forall i \in N \\ x_i \geq \min\limits_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) & \text{для } \forall i \in N. \end{cases}$$

7. **Непустоты (NE)**, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ для любой игры $(N, v) \in G^N$.

[4]Эквивалентно: если $x, y \in X^*(N, v)$ и $x_i > y_i$ для $\forall i \in N$, то $y \notin \sigma(N, v)$

8. **Болвана (DUM)**, если для любой игры $(N, v) \in G^N$, $\forall x \in \sigma(N, v)$, любого игрока, являющегося болваном, т.е. игрока $i \in N$, такого что $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ для $\forall S \subseteq N \backslash \{i\})$, выполняется $x_i = v(\{i\})$.

9. **Симметрии (SYM)**, если из условия $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, $i, j \in N, S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, следует, что $x_i = x_j$ для всех $x \in \sigma(N, v)$.

10. **Единственности (SIVA)**, если $\mid \sigma(N, v) \mid = 1$ для $\forall (N, v) \in G^N$.

С трактовкой вышеприведенных свойств можно ознакомиться в работе Пелега и Зюдхолтера [5].

Данные свойства широко используются для аксиоматизации решений в кооперативной теории игр, более того, аксиоматизация посредством набора свойств позволяет единственным образом определить некоторые решения (например, COV, SIVA, AN и RGP (о данном свойстве ниже) однозначно определяют пред-N-ядро [8], а COV, PO, ETP[5] и CON (о данном свойстве также ниже) — вектор Шепли [8]). Остановимся подробнее на следующих свойствах, являющихся ключевыми для исследования, проведенного в данной работе.

11. **Согласованность по Дэвису-Машлеру (RGP)**. Если из $(N, v) \in G^N, S \subseteq N, S \neq \emptyset$ и $x \in \sigma(N, v)$ следует, что $(S, v_S^x) \in G^N$ и $x^S \in \sigma(S, v_S^x)$,
где (S, v_S^x) - **редуцированная игра** по отношению к S и x игры (N, v), $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ и $x \in X^*(N, v)$:

$$v_S^x(T) = \begin{cases} 0, & \text{если } T = \emptyset \\ v(N) - x(N \backslash S), & \text{если } T = S \\ \max\limits_{Q \subseteq N \backslash S} \left(v(T \cup Q) - x(Q) \right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение редуцированной игры было введено М. Дэвисом и М. Машлером в работе [11], а определение свойства согласованности было дано Соболевым [8] для одноточечных решений и Пелегом [9] для многоточечных.

[5]Равного обращения (Equal treatment property): если $(N, v) \in G^N, x \in \sigma(N, v)$ и для $k, l \in N$ выполняется $k \sim_v l \Rightarrow x^k = x^l$

Пусть T — коалиция и $x \in \mathbb{R}^T$. Если $S \subseteq T$, обозначим за x^S *сужение* x на коалицию S.

Игра в редуцированной форме по Дэвису и Машлеру (S, v_S^x) определяет следующую ситуацию: предположим, что все члены N согласились с тем, что члены $N \setminus S$ получат $x^{N\setminus S}$. Тогда все члены коалиции S могут получить $v(N) - v(N \setminus S)$. Далее предположим, что члены $N \setminus S$ продолжают сотрудничать с членами коалиции S в соответствии с вышеизложенным соглашением. Тогда для любой коалиции $T \subsetneqq S \neq \emptyset$ величина $v_S^x(T)$ является максимальным выигрышем, который коалиция T ожидает получить. Нужно отметить, что ожидания различных непересекающихся подкоалиций могут быть несовместимыми друг с другом, так как они могут требовать кооперации одного и того же подмножества множества $N \setminus S$ [9]. Таким образом, игра (S, v_S^x) не является игрой в обычном смысле, она служит лишь для того, чтобы определить распределение $v_S^x(S)$ между членами коалиции S.

Интерпретация же свойства согласованности по Дэвису-Машлеру состоит в следующем: если (N, v) является игрой и $x \in \sigma(N, v)$, то есть x является решением игры (N, v), тогда для каждой коалиции $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ сужение x^S решения x на коалицию S является решением игры в редуцированной форме (S, v_S^x). Таким образом, можно утверждать, что решение согласуется с ожиданиями членов коалиции S, как это отражается в игре (S, v_S^x) [9].

12. **Согласованность по Харту-Мас-Колеллу (CON)**, если из того, что $(N, v) \in G^N$, $\emptyset \neq S \subseteq N$ и σ - одноточечное, следует, что

$$\sigma^i(S, v_S^\sigma) \in G^N \quad \text{и } \sigma^i(S, v_S^\sigma) = \sigma^i(N, v) \quad \text{для } \forall\, i \in S,$$

где (S, v_S^σ) — $\boldsymbol{\sigma}$ **-редуцированная игра** по отношению к S и x игры (N, v), $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ и $\emptyset \neq T \subseteq S$:

$$v_S^\sigma(T) = v(T \cup (N \backslash S)) - \sum_{i \in N \backslash S} \sigma^i(T \cup (N \backslash S), v)$$

и $v_S^\sigma(\emptyset) = 0$.

Данное определение σ-редуцированной игры и соответствующее свойство согласованности было введено С. Хартом и А. Мас-Колеллем [10] для одноточечных решений.

Игра в редуцированной форме по Харту-Мас-Колеллу (S, v_S^σ) описывает ситуацию, схожую с той, что описывает игра в редуцированной форме по Дэвису-Машлеру, однако в данном случае игра зависит от самого одноточечного решения σ. Если $T \subseteq S$, то величина $v_S^\sigma(T)$ определяется следующим образом: для членов $T \cup (N \setminus S) = Q$ рассматривается подыгра[6] (Q, v), $(Q, v) \in G^N$. Тогда выигрыш игроков $N \setminus S$ определяется в соответствии с $\sigma(Q, v)$. Остаток же, то есть величина $v(Q) - \sum\limits_{i \in N \setminus S} \sigma^i(Q), v)$, и является выгодой коалиции T в редуцированной игре [5].

Интерпретация свойства согласованности по Харту-Мас-Колеллу аналогична интерпретации свойства согласованности по Дэвису-Машлеру.

Введем еще одно определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение 1.1.7. *Множеством* ***дележей*** *называется множество $X(N, v)$, удовлетворяющее свойству индивидуальной рациональности.*

Представленные выше определения и свойства являются основными для описания и аксиоматизации решений в кооперативной теории игр. В следующем разделе будет определен класс эксцессоподобных решений, к которому принадлежат [0-1]-N-ядро и SM-ядро, исследуемые в данной работе, а также будет подробнее рассмотрен набор свойств, которым они удовлетворяют.

[6] Подыгрой игры (N, v) называется игра (T, v^T), где $\emptyset \neq T \subseteq N$ и $v^T(S) = v(S)$ для $\forall S \subseteq T$. Обозначается как (T, v).

1.2 Эксцессоподобные решения

1.2.1 N-ядро и пред-N-ядро

Введем понятие эксцесса, являющееся базовым для эксцессоподобных решений.

Определение 1.2.1. *Пусть $S \subseteq N$ и $x \in \mathbb{R}^N$.* ***Эксцессом*** *коалиции $S \subseteq N$ по отношению к x будем называть величину $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$.*

Смысл эксцесса $e(S, x, v)$ может быть интерпретирован как неудовлетворенность коалиции S выигрышем x. Самыми известными решениями, базирующимися на понятии эксцесса являются пред-K-ядро [2], N-ядро и пред-N-ядро [3]. Пред-K-ядро является хорошо изученными решением; в том числе доказано, что для пред-K-ядра выполняется свойство согласованности по Дэвису и Машлеру, и оно же участвует в однозначной аксиоматизации данного решения. Однако пред-K-ядро имеет недостаток: данное решение имеет не совсем ясную и интуитивно понятную интерпретацию. Более подробно об этом написано в [17].

Обратимся же теперь к более интуитивно понятному концепту, который лежит в основе определений N-ядра и пред-N-ядра, а также и исследуемых в данной работе решений — SM-ядра и [0-1]-N-ядра.

Для начала, введем определения N-ядра и пред-N-ядра.

Определение 1.2.2. ***N-ядром*** *относительно множества $X \subseteq X^0$ будем называть множество $\mathcal{N}(N, v, X)$, такое что:*

$$\mathcal{N}(N, v, X) = \{x \in X \mid \theta(e(S, x, v)_{S \subseteq N}) \preceq_{lex} \theta(e(S, y, v)_{S \subseteq N}) \text{для } \forall y \in X\}$$

где $\theta(e(S, x, v)_{S \subseteq N})$ - вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.

Если $X = X(N, v)$, то N-ядро называется *N-ядром игры* (N, v) и обозначается $\mathcal{N}(N, v, X)$ или $\mathcal{N}(X)$. Если $X = X^0(N, v)$, то N-ядро называется ***пред-N-ядром*** *игры* (N, v) и обозначается $\mathcal{PN}(N, v, X)$ или $\mathcal{PN}(X)$.

Таким образом, если эксцессы определяют неудовлетворенность коалиции $S \subseteq N$ выигрышем x, то вектор $\theta(e(S,x,v)_{S\subseteq N})$ упорядочивает "жалобы" различных коалиций по их величине, начиная с самой большой. Так, N-ядро минимизирует неудовлетворенность коалиций их выигрышами.

Приведем также основные результаты относительно N-ядра и пред-N-ядра, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Отметим, что понятие N-ядра было введено Шмайдлером [3]. Им были приведены и доказаны следующие утверждения.

(1) Пусть X — непустое компактное множество. Тогда $\mathcal{N}(N,v,X) \neq \emptyset$ для любой игры (N,v).

(2) Если X — непустое компактное выпуклое множество, то N-ядро состоит из единственного вектора.

(3) Если X — непустое замкнутое выпуклое подмножество множества $X^*(N,v)$, то $\mathcal{N}(N,v,X)$ непусто и состоит из единственного вектора выигрышей.

Из (3) можно заключить, что пред-N-ядро игры (N,v) состоит из еддинственной точки. Обозначим данную точку через $\nu(N,v)$.

Долгое время были известны многие хорошие свойства, которым удовлетворяло пред-N-ядро, однако оставался открытым вопрос о его однозначной аксиоматизации с помощью данных свойств. Такая аксиоматизация была в конце концов преложена в 1975 г. А. Соболевым [8]. Приведем ее здесь.

Пусть $\mathcal{U}$ — множество игроков и $G_{\mathcal{U}}$ — множество всех игр, чьи множества игроков содержатся в $\mathcal{U}$.

Теорема 1. *Пусть множество $\mathcal{U}$ бесконечно. Тогда существует единственное решение на классе игр $G_{\mathcal{U}}$, которое удовлетворяет SIVA, COV, AN и RGP, и этим решением является пред-N-ядро.*

Важно отметить, что данная аксиоматизация была введена с помощью, в том числе, и свойства согласованности по Дэвису и Машлеру. Это лишний раз подчеркивает важность исследования данного свойства для [0,1]-N-ядра, понятие которого тесно связано с пред-N-ядром и речь о котором пойдет ниже.

1.2.2 [0,1]-N-ядро

В работе [7] Н. В. Смирновой и С. И. Тарашниной была введена новая концепция решения в теории кооперативных игр, основывающаяся на принципе явного учета конструктивной и блокирующей сил коалиции $S \subseteq N$, — [0,1]-N-ядро. Конструктивная сила коалиции S — это та величина $v(S)$, которую, сформировавшись, коалиция S может себе гарантировать, в то время как блокирующая сила $v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S)$ — это та величина, получению которой коалицией S не может препятствовать ее комплементарная коалиция $N \backslash S$. Как пишут Н.В.Смирнова и С.И.Тарашнина в [7]:

> «Мотивацией к созданию [0,1]-N-ядра является всесторонняя оценка возможностей коалиции S в игре (N, v), которая заключается в следующем: сила коалиции $S \subseteq N$ оценивается двойственным образом. С одной стороны, коалиция S $<\ldots>$ обладает конструктивной силой. С другой стороны, коалиция S может блокировать образование максимальной коалиции N в игре (N, v). В этом случае будем говорить, что коалиция обладает блокирующей силой $<\ldots>$. Данную величину можно интерпретировать как ценность коалиции S для всего сообщества игроков в игре (N, v). Мы придерживаемся мнения, что решение кооперативных ТП-игр должно учитывать обе силы коалиции S: как конструктивную, так и блокирующую. Известные концепции решения такие, как C- и N-ядро, не учитывают блокирующую силу коалиции S в игре.»

В 1997 г. Зюдхолтером уже была представлена концепция решения, учитывающего как конструктивную, так и блокирующую силы коалиций, — модифицированное N-ядро[7] [14]. Автор предлагает вместо минимизации наибольшего эксцесса, затем минимизации количества коалиций, на которых достигается наибольший эксцесс, и т.д. (концепция, лежащая в основе пред-N- и N-ядра), минимизировать наибольшую разницу между эксцессами произвольных пар коалиций, а затем минимизировать количество пар коалиций, на которых достигается эта наибольшая разница, и т.д. Или же,

[7] В англоязычной литературе Modified nucleolus или Modiclus

в эквивалентной формулировке, минимизировать сумму эксцессов исходной и двойственной игр произвольных пар коалиций, и т.д. Как и пред-N-ядро, модифицированное N-ядро является одноточечным решением и удовлетворяет свойствам NE, AN, COV, PO, SIVA и DUM [14]. Однако у данного решения есть несколько недостатков: во-первых, оно обладает более высокой вычислительной сложностью, чем пред-N-ядро, и, во-вторых, неизвестно, в каком соотношении решение учитывает конструктивные и блокирующие силы произвольных пар коалиций.

В решении [7] учтены оба этих недостатка. [0,1]-N-ядро учитывает конструктивную и блокирующую силы коалиции S в произвольном соотношении с помощью специально введенного параметра α, а вычислительная сложность не превышает таковую пред-N-ядра.

Введем формальное определение [0,1]-N-ядра.

Пусть игра $(N, v) \in G^N$. Тогда *двойственная* к ней игра (N, v^*) задается следующим образом:

$$v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S), \quad S \subseteq N.$$

Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ в игре (N, v) *α-эксцессом* коалиции $S \subseteq N$ относительно $x \in X^0(N, v)$ будем называть:

$$e^\alpha(x, v, S) = \alpha e(x, v, S) + (1 - \alpha) e(x, v^*, S).$$

Определение 1.2.3. *Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ **α-N-ядром** относительно множества $X^0(N, v)$ (обозначение $\mathcal{N}^\alpha(N, v, X^0)$ или $\mathcal{N}^\alpha(X^0)$) называется множество векторов*

$$\mathcal{N}^\alpha(N, v, X^0) = \{x \in X^0(N, v) \mid \theta(e^\alpha(x, v, S)_{S\subseteq N}) \preceq_{lex} \theta(e\alpha(y, v, S)_{S\subseteq N}) \textit{для } \forall y \in X$$

, где $\theta(e^\alpha(x, v, S)_{S\subseteq N})$ — вектор α-эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.

Определение 1.2.4. [0,1]-*N-ядром* *игры (N, v) на множестве $X^0(N, v)$ будем называть множество всех α-N-ядер игры (N, v). Обозначим [0,1]-N-ядро через $\overline{\mathcal{N}}(X^0)$. Тогда $\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \mathcal{N}^\alpha(X^0)$.*

Данные определения представлены в соответствии с [7].

Приведем здесь ключевые результаты относительно [0,1]-N-ядра, позволяющие выявить его структуру и свойства.

Теорема 2. *α-N-ядро кооперативной игры (N, v) совпадает с пред-N-ядром игры (N, v^α) для любого $\alpha \in [0, 1]$, где*

$$v^\alpha(S) = \alpha v(S) + (1 - \alpha)v^*(S).$$

Теорема 3. *Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ α-N-ядро кооперативной игры (N, v) непусто и состоит из единственной точки.*

Обозначим данную точку через $\nu^\alpha(v)$. Тогда можно заключить, что $\nu^\alpha(v) = \nu(v^\alpha)$, где $v^\alpha(S) = \alpha v(S) + (1 - \alpha)v^*(S),\ S \subseteq N$.

Данный результат очень важен в контексте выявления свойств и аксиоматизации [0,1]-N-ядра, так как существует прямая взаимосвязь между α-N-ядрами, $\alpha \in [0, 1]$, объединением которых и является [0,1]-N-ядро, и пред-N-ядром. В [7] показывается, что [0,1]-N-ядро удовлетворяет свойствам COV, PO, NE, AN, RE, SYM, DUM, как и пред-N-ядро, а также свойству SIVA на классе игр с постоянной суммой и свойству IR на классе 0-монотонных игр. Однако до сих пор не был найден набор свойств, с помощью которого можно однозначно определить [0,1]-N-ядро. Ввиду этого необходимо как минимум проверить справедливость других имеющихся свойств для данного решения. Одной из целей этой работы является проверка выполнимости свойства RGP для [0,1]-N-ядра.

Приведем еще несколько результатов относительно [0,1]-N-ядра из [7], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Утверждение 1. *$[0, 1]$-N-ядро игры (N, v) содержит пред-N-ядро игры (N, v) при $\alpha = 1$.*

Утверждение 2. *$[0, 1]$-N-ядро игры с постоянной суммой состоит из единственной точки и совпадает с пред-N-ядром, модифицированным N-ядром и SM-ядром этой игры.*

Перед тем как перейти к исследованию, рассмотрим также одно из решений, принадлежащих [0,1]-N-ядру при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ — SM-ядро.

1.2.3 SM-ядро

Упрощенное модифицированное N-ядро или, сокращенно, SM-ядро было введено С. И. Тарашниной в [6]. Оно явилось отправным решением для [0,1]-N-ядра и характеризуется тем, что конструктивная и блокирующая силы коалиции S в нем учитываются в равной мере. Как говорится в работе [7], SM-ядро имеет интересную социально-экономическую интерпретацию. Приведем ее здесь:

> «Предположим, что множество N представляет собой некоторое сообщество людей, которые распределяют величину $v(N)$ между всеми членами сообщества. Тогда в качестве решения SM-ядро предлагает вектор, минимизирующий максимальное расстояние между любыми двумя взаимодополняющими частями S и $N \setminus S$ целого сообщества N.»

Таким образом, данное решение минимизирует разницу между степенью неудовлетворенности полученным выигрышем любых пар комплементарных коалиций S и $N \setminus S$ всего сообщества.

Введем его формальное определение согласно [6].

Определим *суммарный эксцесс* коалиции $S \subseteq N$ для каждого $x \in \mathbb{R}^N$ следующим образом:

$$\overline{e}(x, v, S) = e(x, v, S) + e(x, v^*, S).$$

Определение 1.2.5. ***Упрощенным модифицированным N-ядром*** *или, сокращенно,* ***SM-ядром*** *игры (N, v) будем называть множество*

$$\mu(v) = \{x \in X^0(N, v) \mid \theta(\overline{e}(x, v, S)_{S\subseteq N}) \preceq_{lex} \theta(\overline{e}(y, v, S)_{S\subseteq N}) \text{для } \forall y \in X^0(N, v)\},$$

где $\theta(e^\alpha(x, v, S)_{S\subseteq N})$ — вектор суммарных эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.

Пусть (N, v) — кооперативная ТП-игра. Теперь определим для каждого $x \in \mathbb{R}^N$

$$\overline{\overline{e}}(x, v, S) = e(x, v, S) - e(x, v, N \setminus S)$$

для каждой коалиции $S \subseteq N$.

Теперь рассмотрим множество

$$\{x \in X^0(N,v) \mid \theta(\overline{\overline{e}}(x,v,S)_{S\subseteq N}) \preceq_{lex} \theta(\overline{\overline{e}}(y,v,S)_{S\subseteq N})\text{для } \forall y \in X^0(N,v)\} \tag{1.1}$$

В [6] было доказано, что множество, определенное по формуле 1.1, совпадает с SM-ядром игры (N,v) для $x \in X^0$.

Также было доказано, что SM-ядро удовлетворяет свойствам COV, PO, NE, AN, RE, SYM, DUM и SIVA. Однако, как и для [0,1]-N-ядра, еще не было определено, какие свойства могут однозначно характеризовать SM-ядро. Поэтому, как и для [0,1]-N-ядра, имеет смысл как минимум проверить выполнение других имеющихся свойств для данного решения, в частности, RGP.

Однако стоит отметить, что, в отличие от [0,1]-N-ядра, SM-ядро является одноточечным решением. Одним из самых известных одноточечных решений в теории кооперативных игр помимо пред-N-ядра является вектор Шепли. Приведем здесь его определение, введенное Шепли в [4].

Определение 1.2.6. ***Вектор Шепли*** *ϕ игры $(N,v) \in G^N$ определяется следующим образом:*

$$\phi^i(v) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}-v(S))$$

для любого $i \in N$, где $\mathcal{V}$ - множество всех характеристических функций на 2^N.

Существует следующая аксиоматизация вектора Шепли, приведенная Хартом и Мас-Колеллом в [10].

Теорема 4. *Существует единственное решение на множестве игр G^N, удовлетворяющее свойствам COV, PO, ETP, и CON, и этим решением является вектор Шепли.*

Стоит отметить, что для данной аксиоматизации Хартом и Мас-Колеллом было введено новое определение редуцированной игры для одноточечных решений и, соответственно, новое свойство согласованности

(CON), которому удовлетворяет вектор Шепли. Представляет интерес также проверка данного свойства и для SM-ядра, а также для другого одноточечного решения — α-N-ядра. Но прежде чем переходить к проверке вышеописанных свойств для представленных решений, приведем здесь некоторые результаты относительно SM-ядра.

Утверждение 3. $[0,1]$-*N-ядро игры* (N, v) *содержит SM-ядро игры* (N, v) *при* $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Утверждение 4. *Для игр трех лиц SM-ядро и вектор Шепли совпадают.*

Теперь перейдем к исследованию вышеупомянутых решений в контексте проверки выполнения для них свойста согласованности по Дэвису-Машлеру (RGP) и свойств согласованности по Харту-Мас-Колеллу (CON) и оценки возможности их аксиоматизации при помощи данных свойств.

Глава 2. Исследование [0,1]-N-ядра и SM-ядра

2.1 Метод нахождения [0,1]-N-ядра и SM-ядра

Для того, чтобы выполнить проверку свойств согласованности, необходимо для начала реализовать метод, вычисляющий [0,1]-N-ядро и SM-ядро игры (N, v). Напомним, что по определению 1.2.4 [0,1]-N-ядро игры (N, v) является множеством всех α-N-ядер игры (N, v), а из утверждения 3 раздела 1.2.3 следует, что SM-ядро является α-N-ядром при $\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, можно ограничиться реализацией метода, позволяющего считать α-N-ядро кооперативной игры (N, v) для любого $\alpha \in [0, 1]$.

Использованный в данной работе метод вычисления α-N-ядра базируется на работе [7], а именно на теореме, приведенной в данной работе в разделе 1.2.2 под номером 2. На основании данной теоремы можно сделать вывод о том, что вычислительная сложность нахождения α-N-ядра кооперативной игры (N, v) сопоставима с вычислительной сложностью нахождения пред-N-ядра игры (N, v^α). Таким образом, для нахождения α-N-ядра для фиксированного α может быть использован любой метод, разработанный для нахождения пред-N-ядра. Заметим, что [0,1]-N-ядро в программном виде можно представить как с некоторым шагом последовательно вычисленные α-N-ядра для фиксированных $\alpha \in [0, 1]$.

Существует множество алгоритмов для вычисления пред-N-ядра, но все они сводятся к решению последовательности задач линейного программирования. Один из первых алгоритмов был придуман А. Копеловицем [18], однако количество задач линейного программирования для игры n лиц в его методе может достигать значения $2^n - 1$. Е. Колбергом [19] и Г. Оуэном [20] были приведены алгоритмы, состоящие из одной задачи линейного программирования. В ходе решения Колберг использует $\mathrm{O}(n)$ переменных и $\mathrm{O}((2^n)!)$ ограничений, в то время как Оуэн использует $\mathrm{O}(2^n)$ переменных и $\mathrm{O}(4^n)$ ограничений. Данные задачи линейного программирования могут быть интересны с теоретической точки зрения, однако ограниченно используются на практике из-за высокой вычислительной сложности (особенно для игр большой размерности).

В данной работе для решения задачи нахождения α-N-ядра игры (N, v), что, как было сказано выше, эквивалентно задаче нахождения пред-N-ядра игры (N, v^{α}), была использована функция $PreNucl()$, реализованная в рамках пакета расширения MATLAB MatTuGames Toolbox [21], который представляет собой библиотеку функций для поиска различных решений и проверки свойств, известных в теории кооперативных ТП-игр. Данная функция реализует алгоритм нахождения пред-N-ядра, предложенный Поттерсом и др. [22]. Этот алгоритм имеет то преимущество, что в ходе нахождения решения игры n лиц предлагает решение как максимум $n-1$ задачи линейного программирования с использованием как максимум $2^n + n - 1$ строку и $2^n - 1$ столбец.

Так как любая игра (N, v) однозначно определяется своей характеристической функцией v, игру можно задать вектором размерности $2^n - 1$ (по числу всевозможных коалиций в игре (N, v), исключая пустую), элементами которого будут являться значения функции v. Здесь встает вопрос о том, в каком порядке следует сортировать элементы данного вектора, что эквивалентно вопросу о том, в каком порядке следует располагать коалиции. По предложению Майнхардта [23], пусть каждому игроку в игре (N, v) ставится в соответствие натуральное число $i \in [1, N]$. Тогда каждая коалиция S может быть однозначно определена с помощью числа $\sum\limits_{i \in S} 2^{i-1}$ из интервала $[1, 2^n - 1]$.

Приведем пример. Рассмотрим игру 4-х лиц. Тогда порядок коалиций может быть задан с помощью вектора

$$[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15],$$

что соответствует следующей последовательности их представления:

$$\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\},$$

$$\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}.$$

Здесь, например, коалиции $\{1, 2\}$ соответствует число $2^{1-1} + 2^{2-1} = 3$.

Для нахождения α-N-ядра для фиксированных $\alpha \in [0, 1]$ была реализована функция, строящая игру v^{α} по теореме 2, а также функция, вычисляющая α-N-ядра для $\alpha \in$ [alpha1,alpha2], где alpha1,alpha2 $\in [0,1]$ с шагом step (см. Приложение 1).

Таким образом, в ходе выполнения программы получаем множество α-N-ядер для $\alpha \in$ [alpha1,alpha2]. При [alpha1,alpha2] $= [0,1]$ это множество соответствует [0,1]-N-ядру игры (N, v), а при фиксированном $\alpha = \frac{1}{2}$ — SM-ядру.

Пример 2.1.1. Пусть игра (N, v) задана характеристической функцией в 0-редуцированной форме

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 2,\ \ v(\{1,3\}) = 5,\ \ v(\{2,3\}) = 3,\ \ v(N) = 9.$$

Как мы можем видеть на Рис. 2.1, в кооперативной игре (N, v) [0,1]-N-ядро представляет собой связное множество в $\mathbb{R}^3$, состоящее из отрезков, последовательно соединенных своими концами. Данный факт был доказан в [15].

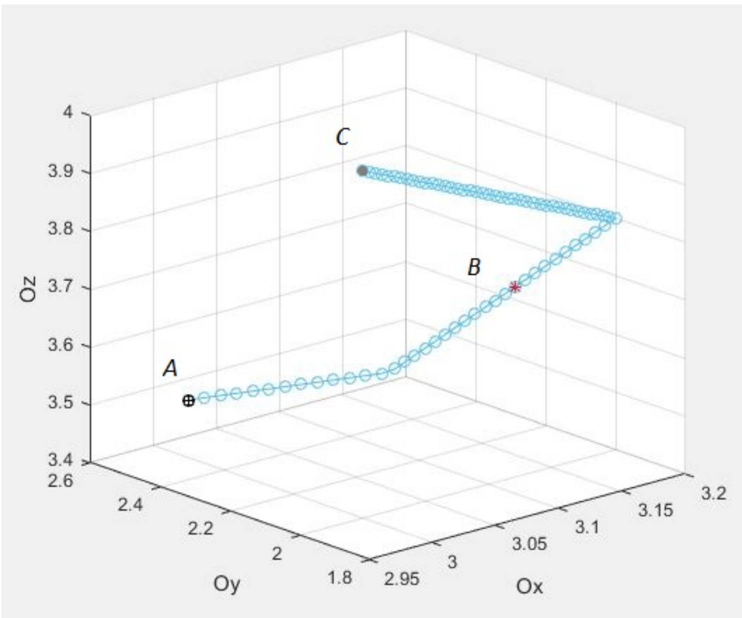


Рисунок 2.1 — [0,1]-N-ядро для игры 3-х лиц

Полученное множество берет начало в точке A = (3, 2.5, 3.5), являющейся α-N-ядром при $\alpha = 0$, а концом его является точка C = (3, 2, 4), представляющая собой α-N-ядро при $\alpha = 1$. Отметим, что точка C совпрадает с пред-N-ядром по теореме 1. С таблицей выходных значений для данной игры можно ознакомиться в Приложении 2. Отметим, что в рассмотренной игре SM-ядро является точкой B $=$ (3.1667, 2.1667, 3.6667) при $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

2.2 Проверка выполнения свойства согласованности (RGP) по Дэвису-Машлеру

Свойство согласованности несет в себе большое значение. Его интерпретация была подробно расписана в разделе 1.1.2, кратко же она заключается в следующем: согласованность решения $\sigma(N, v)$ означает, что если выигрыши игроков определены согласно σ, то даже если часть игроков покинет игру с назначенными им σ выигрышами, то для оставшихся игроков распределение выигрышей согласно σ не изменится. Одну из ключевых ролей свойство согласованности по Дэвису-Машлеру играет в аксиоматизации некоторых решений кооперативной теории игр, таких как, например, пред-N-ядро, — решения, тесно связанного с исследуемыми в данной работе [0,1]-N-ядром и SM-ядром. В свете этого существует необходимость проверки данного свойства для еще не аксиоматизированных решений: [0,1]-N-ядра и SM-ядра.

Исследуем выполнение данного свойства для α-N-ядер кооперативной игры (N, v) для любого $\alpha \in [0, 1]$. Таким образом, на основании выполнения или не выполнения свойства согласованности для различных α-N-ядер можно будет сделать вывод о выполнении или не выполнении свойства для [0,1]-N-ядра и SM-ядра.

Для этого в среде MATLAB с помощью библиотеки MatTuGames Toolbox была реализована программа, строящая редуцированную игру по определению Дэвиса и Машлера (см. Определение 11 и Приложение 3, пункт 1). Для игры (N, v) n лиц на вход подается коалиция S, для которой должна быть построена редуцированная игра, вектор характеристической функции исходной игры v размерности $2^n - 1$, сортированный по правилу, описанному в разделе 2.1, а также параметр α и количество игроков. На выходе получается новая характеристическая функция v_S^x игры в редуцированной форме (S, v_S^x).

Для самой проверки свойства согласованности по Дэвису-Машлеру для α-N-ядра была реализоава функция, представленная в Приложении 3, пункт 2. В ходе выполнения программы сначала находятся решения исходной игры (N, v) для разных значений $\alpha \in [0, 1]$, а также решения игры в редуцированной форме (S, v_S^x) для заданной оставшейся коалиции S, после чего производится сравнение выигрышей игроков, принадлежащих данной коалиции S, в исходной и редуцированной игре. Результатом работы функции является переменная check булевого типа (если 1, следовательно, RGP для данного решения выполняется, если 0 — не выполняется), а также вектор решения x^S редуцированной игры (S, v_S^x).

С помощью реализованной функции выполним проверку свойства согласованности по Дэвису-Машлеру для α-N-ядра при $\alpha \in \{0, 0.5, 1\}$ на следующем примере.

Пример 2.2.1. Пусть задана игра 3-х лиц $(N, v) \in G^N$ со следующей характеристической функцией:

$$v(\{1\}) = 0,\ \ v(\{2\}) = 1,\ \ v(\{3\}) = 5,$$

$$v(\{1,2\}) = 3,\ \ v(\{1,3\}) = 9,\ \ v(\{2,3\}) = 7,\ \ v(N) = 15.$$

Пусть игрок 3 покинет игру. Тогда оставшейся коалицией, для которой будет построена редуцированная игра (S, v_S^x), будет коалиция $S = \{1, 2\}$. Проверим, удовлетворяет ли в данном случае α-N-ядро RGP. Полагая, что параметр α изменяется от 0 до 1 с шагом 0.1, получим результаты, представленные в Таблице 2.2. Как можно заметить, RGP в данной игре не выполняется для α-N-ядра при $\alpha \in [0, 0.6]$ и выполняется при $\alpha \in [0.7, 1]$. В целях уточнения результата также была произведена проверка RGP для $\alpha \in [0.6, 0.7]$ с шагом 0.001. Выдержка из результатов приведена в Приложении 3, пункт 3. Как можно заметить, RGP выполняется только начиная с $\alpha = 0.7$. следовательно, можно сделать вывод о том, что RGP в данной игре не выполняется для α-N-ядра при $\alpha \in [0, 0.7)$ и выполняется при $\alpha \in [0.7, 1]$.

Нетрудно заметить, что для $\alpha = 0.5$, при котором решение является SM-ядром, свойство согласованности по Дэвису-Машлеру не выполняется. А значит, можно сделать следующий вывод.

В общем случае SM-ядро не удовлетворяет свойству согласованности по Дэвису-Машлеру.

Таблица 2.1 — Проверка RGP для игры 3-х лиц

Коалиция $S = \{1, 2\}$						
α	RGP	x			x^S	
0.0	0	4.000	2.500	8.500	3.000	3.500
0.1	0	4.000	2.600	8.400	3.100	3.500
0.2	0	4.000	2.700	8.300	3.200	3.500
0.3	0	3.933	2.833	8.233	3.267	3.500
0.4	0	3.800	3.000	8.200	3.300	3.500
0.5	0	3.667	3.167	8.167	3.333	3.500
0.6	0	3.533	3.333	8.133	3.367	3.500
0.7	1	3.400	3.500	8.100	3.400	3.500
0.8	1	3.350	3.500	8.150	3.350	3.500
0.9	1	3.300	3.500	8.200	3.300	3.500
1.0	1	3.250	3.500	8.250	3.250	3.500

Попытаемся теперь выяснить, не существует ли каких-либо параметров α, при которых исследуемое свойство всегда выполняется. Для этого приведем еще один пример.

Пример 2.2.2. Пусть задана игра 5-ти лиц $(N, v) \in G^N$ со следующей характеристической функцией:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \in \{1, 3\}, \\ 2, & \text{если } S \in \{1, 4, 5\}, \\ 3, & \text{если } S \in \{\{1, 5\}, \{3, 5\}\}, \\ 4, & \text{если } S \in \{\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, \\ 5, & \text{если } S \in \{1, 2, 3, 5\}, \\ 6, & \text{если } S \in \{2, 3\}, \\ 10, & \text{если } S = N, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проверим выполнение свойства согласованности (RGP) в случае, когда игру покидают игроки 1, 2 и 3. Пусть параметр α изменяется от 0 до 1 с шагом 0.001. С результатами, полученными после проверки, можно ознакомиться в Приложении 3, пункт 4.

Как можно увидеть, свойство согласованности в данной игре не выполняется ни для какого $\alpha \in [0,1]$, кроме как $\alpha = 1$. Отметим, что схожие результаты (свойство выполнялось только для $\alpha = 1$) были получены при проверке многих других игр. Данный результат вполне согласуется с Утверждением 1, а именно с тем фактом, что при $\alpha = 1$ [0,1]-N-ядро включает в себя пред-N-ядро. Таким образом, ввиду малости выбранного шага, можно сделать следующий вывод.

В общем случае свойство согласованности по Дэвису-Машлеру для α-N-ядра не выполняется ни для каких $\alpha \in [0,1]$, кроме $\alpha = 1$.

В результате исследования также было получено следующее интересное наблюдение, позволяющее геометрически изобразить невыполнение в общем случае свойства согласованности по Дэвису-Машлеру для [0-1]-N-ядра. Теорема о структуре [0,1]-N-ядра [15] утверждает, что [0,1]-N-ядро геометрически представляет собой связанные концами отрезки в пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, [0-1]-N-ядра редуцированных игр по Дэвису-Машлеру для всех возможных $2^n - 1$ коалиций также являются связными множествами, представляющими собой соединенные отрезки, но в пространствах меньшей размерности, чем $\mathbb{R}^n$ (т.е. в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-2}$,…,$\mathbb{R}$). Таким образом, геометрически выполнение свойства согласованности для [0,1]-N-ядра означает следующее: проекции решения исходной игры на пространства меньшей размерности для [0,1]-N-ядра должны совпадать с решениями игр в редуцированной форме в этих пространствах.

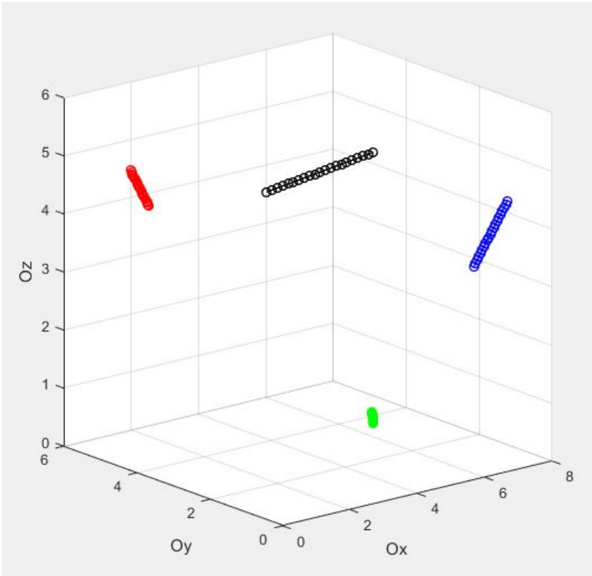
Приведем пример для игры 3-х лиц, позволяющий наглядно представить вышеизложенное утверждение.

Пример 2.2.3. Пусть характеристическая функция игры $(N, v) \in G^N$ 3-х лиц выглядит следующим образом:

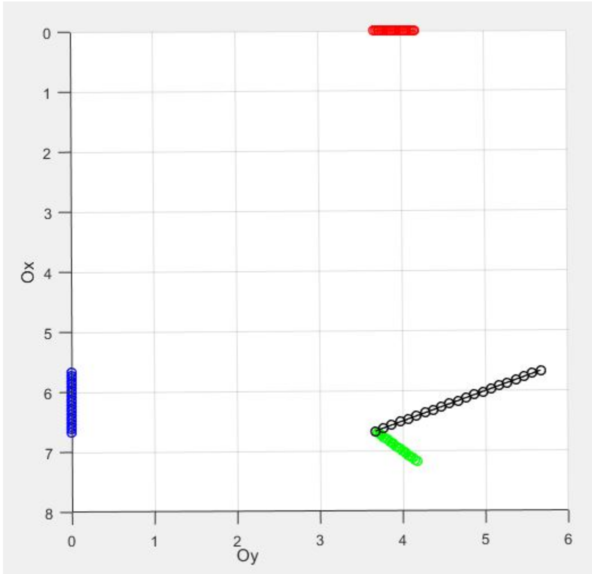
$$v(\{1\}) = 4, \;\; v(\{2\}) = 1, \;\; v(\{3\}) = 2,$$

$$v(\{1,2\}) = 6, \;\; v(\{1,3\}) = 4, \;\; v(\{2,3\}) = 4, \;\; v(N) = 15.$$

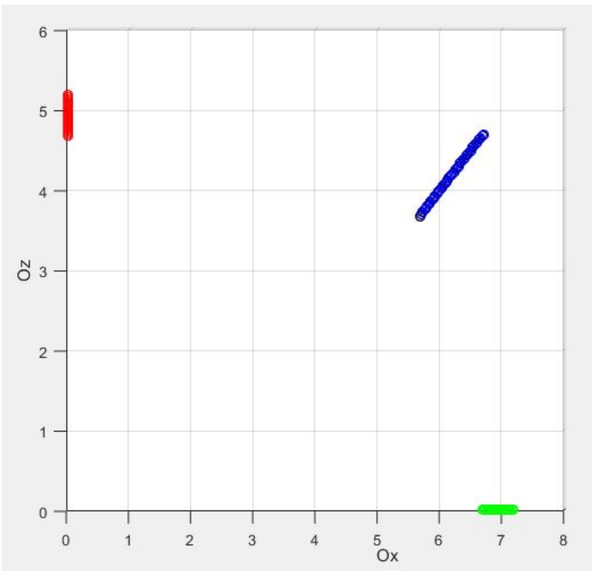
Результаты проверки свойства согласованности (RGP) для коалиций $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ представлены в Приложении 3, пункт 5. Как можно заметить, данное свойство выполняется для коалиций $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$ лишь при $\alpha = 1$, а для коалиции $\{1,3\}$ — для всех $\alpha = [0,1]$. Данный факт хорошо виден на Рис. 2.2. [0,1]-N-ядро исходной игры представляет собой один отрезок в трёхмерном пространстве (выделен черным цветом). Решение редуцированной игры для коалиции $\{1,2\}$, лежащее в плоскости Oxy, выделено зеленым цветом; для коалиции $\{2,3\}$, лежащее в плоскости Oyz — красным цветом; для коалиции $\{1,3\}$, лежащей в плоскости Oxz — синим цветом. В плоскости Oxy, что соответствует коалиции $\{1,2\}$ (Рис. 2.2б), а также в плоскости Oyz, что соответствует коалиции $\{2,3\}$ (Рис. 2.2г), можно увидеть, что проекции [0,1]-N-ядра исходной игры на эти плоскости и решения редуцированных игр совпадают лишь в одной точке, что соответствует выполнению свойства согласованности (RGP) при $\alpha = 1$. В плоскости же Oxz, что соответствует коалиции $\{1,3\}$ (Рис. 2.2в), проекция исходного решения и решение редуцированной игры совпадают полностью, что вполне соответствует результатам проверки свойства согласованности (RGP).



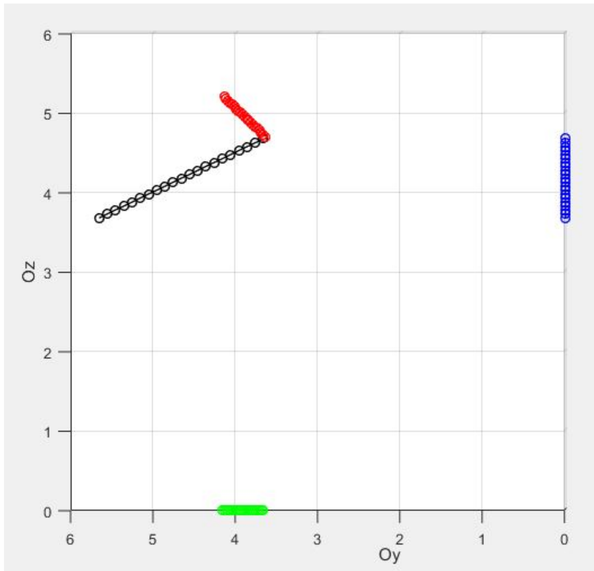
(а) [0-1]-N-ядро



(б) Oxy



(в) Oxz



(г) Oyz

Рисунок 2.2 — Геометрическая интерпретация выполнения RGP для игры 3-х лиц

2.3 Проверка выполнения свойства согласованности (CON) по Харту-Мас-Колеллу

Как уже было сказано выше, Хартом и Мас-Колеллом было введено новое определение редуцированной игры для одноточечных решений и, соответственно, новое свойство согласованности (CON), которое используется для аксиоматизации вектора Шепли. Представляет интерес также проверка данного свойства и для SM-ядра, а также для другого одноточечного решения — α-N-ядра.

Как и для проверки свойства согласованности по Дэвису-Машлеру, для проверки выполнения CON для α-N-ядер, $\alpha \in [0, 1]$, и SM-ядра в среде MATLAB при помощи библиотеки MatTuGames была реализована программа, строящая редуцированную игру по определению Харта-Мас-Колелла, или, иначе, σ-редуцированную игру (см. Приложение 4, пункт 1). Как и для функции построения редуцированной игры по определению Дэвиса-Машлера, для игры (N, v) на вход подается коалиция S, для которой должна быть построена редуцированная игра, вектор характеристической функции исходной игры v размерности $2^n - 1$, сортированный по правилу, описанному в разделе 2.1, а также параметр α и количество игроков. На выходе получается новая характеристическая функция v_S^σ редуцированной игры (S, v_S^σ).

Функция, выполняющая саму проверку свойства согласованности (CON), аналогична той же функции для проверки RGP: сначала считается α-N-ядро для исходной игры, потом для некоторой коалиции S строится σ-редуцированная игра (S, v_S^σ) и вычисляется ее решение, далее сверяются решение исходной игры и решение редуцированной и делается вывод о выполнении свойства CON.

Теперь выполним с помощью описанной программы проверку справедливости свойства согласованности по Харту-Мас-Колеллу для α-N-ядра при α, варьируещимся от 0 до 1 с шагом 0.1. Напомним, что при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ α-N-ядро является SM-ядром.

Для проверки возьмем игру 3-х лиц, описанную в примере 2.2.2. Результаты выполнения программы представлены в Приложении 4, пункт 2. Как можно заметить, в общем случае свойство согласованности по Харту-Мас-Колеллу для данной игры не выполняется, кроме случая, когда $\alpha = \dfrac{1}{2}$, что соответствует SM-ядру игры (N, v). Полученный результат согласуется с Утверждением 4, говорящим о том, что в случае игр 3-х лиц вектор Шепли и SM-ядро совпадают. Следовательно, раз свойство CON выполняется для вектора Шепли, то в данном случае оно выполняется и для SM-ядра.

При проверке свойства согласованносте по Харту-Мас-Колеллу для игры 5-ти лиц из примера 2.2.2 было установлено, что для большинства коалиций данное свойство не выполнялось ни для каких $\alpha \in [0, 1]$ (вывод для коалиций $\{3, 5\}$ и $\{1, 2, 4, 5\}$ представлен в Приложении 4, пункт 3). Таким образом, можно сделать следующий вывод.

В общем случае свойство согласованности по Харту-Мас-Колеллу для α-N-ядра не выполняется ни для каких $\alpha \in [0, 1]$, в том числе и для SM-ядра.

2.4 О выполнении свойств для различных решений

В данном разделе приведена сравнительная таблица выполнения различных свойств для таких решений кооперативной теории игр, как пред-N-ядро, вектор Шепли, SM-ядро и [0,1]-N-ядро.

Таблица 2.2 — Решения и свойства

Свойства \ Решения	Пред-N-ядро	Вектор Шепли	SM-ядро	[0,1]-N-ядро
Ковариантность	$\oplus$	$\oplus$	$+$	$+$
Анонимность	$\oplus$	$\oplus$	$+$	$+$
Групповая рациональность	$+$	$\oplus$	$+$	$+$
Индивидуальная рациональность	$-$	$-$	$-$	$-$
Супераддитивность	$-$	$+$		
Обоснованность	$+$	$+$	$+$	$+$
Непустота	$+$	$+$	$+$	$+$
Свойство болвана	$+$	$\oplus$	$+$	$+$
Свойство равного обращения	$\oplus$	$\oplus$		
Симметричность	$+$	$+$	$+$	$+$
Единственность	$\oplus$	$\oplus$	$+$	$-$
Аддитивность	$-$	$\oplus$		
Строгая монотонность	$-$	$\oplus$		
Согласованность по Дэвису-Машлеру	$\oplus$	$-$	$-$	$-$
Согласованность по Харту-Мас-Колеллу	$-$	$\oplus$	$-$	$-$

$-$: свойство не выполняется

$+$: свойство выполняется

$\oplus$: свойство используется как минимум в одной аксиоматизации решения

Напомним, что аксиоматизация пред-N-ядра была выполнена Соболевым [8] (см. Теорему 1). Для вектора Шепли существуют несколько аксиоматизаций: одна из них предложена Шепли [4] и включает в себя свойства аддитивности[8], SIVA, ETP и NP. Другая была предложена Хартом и Мас-Колеллом [10] (см. Теорему 4), и еше одна была предложена Янгом [24], которая, в свою очередь, подразумевает выполнение свойств строгой монотонности[9], SIVA, ETP и PO.

Как уже было сказано ранее, Н. В. Смирновой и С. И. Тарашниной в работе [7] было показано, что [0-1]-N-ядро удовлетворяет свойствам COV, PO, NE, AN, RE, SYM, DUM, но в общем случае не удовлетворяет SIVA и IR. С. В. Бритвиным и С. И. Тарашниной [25] был доказан тот факт, что для SM-ядра свойство строгой монотонности не выполняется. В данной работе же показано, что в общем случае [0-1]-N-ядро, а также SM-ядро не удовлетворяют свойствам RGP и CON, и, следовательно, не могут быть аксиоматизированы с их помощью.

[8]Решение **аддитивно**, если для любой пары игр (N, v_1) и (N, v_2) $\sigma(v_1 + v_2) = \sigma(v_1) + \sigma(v_2)$

[9]Одноточечное решение на $\mathcal{K}$ **строго монотонно**, если для любых пар игр (N, v) и (N, u), $i \in N$ из того, что $u(S \cup \{i\}) - u(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$ для $\forall S \subseteq N$, следует, что $\sigma^i(u) \geq \sigma^i(v)$

Выводы

В ходе исследования были решены следующие задачи:

— реализовано программное обеспечение, вычисляющее α-N-ядро для любого α, $\alpha \in [0, 1]$;

— реализовано программное обеспечение, строящее редуцированные игры по Дэвису-Машлеру и Харту-Мас-Колеллу для α-N-ядра для любого α, $\alpha \in [0, 1]$;

— реализовано программное обеспечение, выполняющее проверку свойства согласованности по Дэвису-Машлеру (RGP) и свойства согласованности по Харту-Мас-Колеллу (CON) для α-N-ядра для любого α, $\alpha \in [0, 1]$;

— сделан вывод о том, что для [0,1]-N-ядра и SM-ядра свойство согласованности по Дэвису-Машлеру в общем случае не выполняется, кроме как на классах игр, когда данные решения совпадают с пред-N-ядром. Следовательно, аксиоматизация данных решений при помощи этого свойства невозможна;

— сделан вывод о том, что для α-N-ядра, $\alpha \in [0, 1]$, свойство согласованности по Харту-Мас-Колеллу в общем случае не выполняется, в частности, не выполняется и для SM-ядра, кроме как в случае игр трех лиц, когда данное решение совпадает с вектором Шепли. Следовательно, аксиоматизация SM-ядра при помощи этого свойства невозможна.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что SM-ядро, и, соответственно, [0,1]-N-ядро не могут быть аксиоматизированы с помощью существующих свойств согласованности по Дэвису-Машлеру и Харту-Мас-Колеллу.

Заключение

В работе исследуется справедливость свойств согласованности по Дэвису-Машлеру и Харту-Мас-Колеллу для сравнительно новых решений в теории кооперативных игр — [0,1]-N-ядра и SM-ядра. Данные решения обладают множеством свойств: COV, PO, NE, AN, RE, SYM, DUM; SM-ядро также удовлетворяет SIVA. Однако до сих пор не был найден такой набор свойств, который позволил бы однозначно определить эти решения.

Ввиду того, что [0,1]-N-ядро и SM-ядро относятся к классу эксцессоподобных решений, и их определение тесно связано с другим решением кооперативных игр — пред-N-ядром, — была поставлена задача проверки свойств, участвующих в аксиоматизации пред-N-ядра, а именно, свойства согласованности по Дэвису-Машлеру. Для полноты исследования также была поставлена задача проверки выполнения свойства согласованности по Харту-Мас-Колеллу, участвующему в акисоматизации вектора Шепли.

В ходе работы было реализовано программное обеспечение, строящее редуцированные игры по Дэвису-Машлеру и Харту-Мас-Колеллу, а также выполняющее проверку RGP и CON для α-N-ядра для любого α, $\alpha \in [0, 1]$, и SM-ядра. С помощью данного программного обеспечения были найдены контрпримеры, показывающие, что ни для α-N-ядра для любого α, $\alpha \in [0, 1]$, ни для SM-ядра в общем случае данные свойства не выполняются. Также была предложена интуитивно понятная геометрическая интерпретация свойства согласованности по Дэвису-Машлеру, позволяющая сделать вывод о том, что в общем случае RGP для [0,1]-N-ядра не выполняется. Однако стоит отметить, что данная интерпретация нуждается в дальнейшем теоретическом обосновании для подтверждения результатов.

Следует заметить, что [0,1]-N-ядро явным образом учитывает конструктивную и блокирующую силу коалиции $S \subseteq N$ с помощью введенного параметра $\alpha \in [0, 1]$. В то же время известно, что при $\alpha = 1$, то есть когда конструктивная сила коалиции учитывается со множителем 1, а блокирующая — со множителем 0, α-N-ядро — точка, принадлежащая [0,1]-N-ядру, — совпадает с пред-N-ядром и RGP для данного α-N-ядра выполняется всегда.

Из этого можно сделать вывод о том, что редуцированная игра по

Дэвису-Машлеру, как и пред-N-ядро, не предполагает явного учета блокирующей силы коалиции. Учитывая тот факт, что определения пред-N-ядра и [0,1]-N-ядра тесно связаны и для пред-N-ядра свойство согласованности всегда выполняется, [0,1]-N-ядро, теоретически, тоже может обладать свойством согласованности, хоть, может, и в несколько иной форме, чем нам оно известно. Таким образом, для дальнейшего исследования могут быть поставлены следующие задачи:

1. Предложить новое определение редуцированной игры (возможно, основанное на определении по Дэвису-Машлеру), явным образом включающее в себя параметр $\alpha \in [0, 1]$, позволяющий учитывать как конструктивную, так и блокирующую силу коалиции $S \subseteq N$;

2. Предложить новое свойство согласованности, выполняющееся для [0,1]-N-ядра и SM-ядра;

3. Исследовать возможность аксиоматизации [0,1]-N-ядра при помощи предложенного свойства.

Список литературы

1. *Gillies D.* Solutions to general non-zero-sum games // Contribution to the theory of games IV / ed. by A. Tuker, R. Luce. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1959. — P. 47–85. — (Annals of Mathematics Studies).
2. *Maschler M.*, *Peleg B.*, *Shapley L.* The kernel and bargaining set for convex games // International Journal of Game Theory. — 1972. — Vol. 1, issue 1. — P. 73–93. — DOI: `10.1007/BF01753435`.
3. *Schmeidler D.* The nucleolus of a characteristic function game // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1969. — Vol. 17, no. 6. — P. 1163–1170.
4. *Shapley L.* A value for n-person games // Annals of Mathematics Studies. — 1953. — Vol. 28. — P. 307–318.
5. *Peleg B.*, *Sudhölter P.* Introduction to the theory of cooperative games. — 2nd ed. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. — xx, 328 p. — (Theory and Decision Library C: v. 34). — DOI: `10.1007/978-3-540-72945-7`.
6. *Tarashnina S.* The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game // TOP. — 2011. — Vol. 19, issue 1. — P. 150–166. — DOI: `10.1007/s11750-009-0118-z`.
7. *Смирнова Н. В.*, *Тарашнина С. И.* Об одном обобщении N-ядра в кооперативных играх // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 77—93.
8. *Соболев А.* Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений // Математические методы в социальных науках. — Вильнюс, 1975. — № 6.
9. *Peleg B.* On the reduced game property and its converse // International Journal of Game Theoty. — 1986. — Vol. 15, issue 3. — P. 187–200. — DOI: `10.1007/BF01769258`.
10. *Hart S.*, *Mas-Colell A.* Potential, value, and consistency // Econometrica. — 1989. — Vol. 57, no. 3. — P. 589–614. — DOI: `10.2307/1911054`.

11. *Davis M.*, *Maschler M.* The kernel of a cooperative game // Naval Research Logistics Quarterly. — 1965. — Vol. 12, issue 3. — P. 223–259. — DOI: 10.1002/nav.3800120303.

12. *Aumann R.*, *Dreze J.* Cooperative games with coalition structures // International Journal of Game Theory. — 1974. — Vol. 3, issue 4. — P. 217–237. — DOI: 10.1007/BF01766876.

13. *Aumann R. J.*, *Maschler M.* Game theoretic analysis of a bunkruptcy problem from the Talmud // Journal of Economic Theory. — 1985. — Vol. 36. — P. 195–213.

14. *Sudhölter P.* The modified nucleolus: properties amd axiomatizations // International Journal of Game Theory. — 1997. — Vol. 26, issue 2. — P. 147–182.

15. *Смирнова Н. В.*, *Тарашнина С. И.* Геометрические свойства [0,1]-N-ядра в кооперативных ТП-играх // Математическая Теория Игр и ее Приложения. – 2012. – Т. 4, вып. 1. – С. 55—73.

16. *von Neumann, J.*, *Morgenstern O.* Theory of games and economic behaviour. — 3rd ed. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1953.

17. *Maschler M.*, *Peleg B.*, *Shapley L.* Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts // Mathematics of Operations Research. — 1979. — Vol. 4, no. 4. — P. 303–338.

18. *Kopelowitz A.* Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games. — Department of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, 1967. — 47 p.

19. *Kohlberg E.* The nucleolus as a solution of a minimization problem // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1972. — Vol. 23, no. 1. — P. 34–39.

20. *Owen G.* A note on the nucleolus // International Journal of Game Theory. — 1974. — Vol. 3, issue 2. — P. 101–103.

21. MATLAB Toolbox MatTuGames. — URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35933-mattugames.

22. *Potters J. A.*, *Reijnierse J. N.*, *Ansing M.* Computing the nucleolus by solving a prolonged simplex algorithm // Mathematics of Operations Research. — 1996. — Vol. 21, issue 3. — P. 757–768.

23. *Holger I. Meinhardt.* The Matlab Game Theory Toolbox MatTuGames Version 0.4: An Introduction, Basics, and Examples. — URL: https://www.researchgate.net/publication/295513836_The_Matlab_Game_Theory_Toolbox_MatTuGames_Version_04_An_Introduction_Basics_and_Examples.

24. *Young H. P.* Monotonic solutions of cooperative games // International Journal of Game Theory. — 1985. — Vol. 14. — P. 65–72.

25. *Britvin S.*, *Tarashnina S.* On monotonicity of the SM-nucleolus and the α-nucleolus // Contributions to Game Theory and Management. — 2012. — Vol. 7. — P. 8–16.

Приложения

Приложение 1. Нахождение [0,1]-N-ядра и SM-ядра

1. Построение игры v^{α}:

```
function [v_a] = v_alpha(alpha,v,n)
%строит игру v^alpha для подсчета alpha-Nядра-
%v = [] - характеристическая функция исходной игры
%n - число игроков
%порядок коалиций для n=4:
%{{1},{2},{1,2},{3},{1,3},{2,3},{1,2,3},...
%{4},{1,4},{2,4},{1,2,4},{3,4},{1,3,4},{2,3,4},{1,2,3,4}}
if (alpha > 1) || (alpha < 0)
    error('Alpha should be in range [0,1]');
end
if size(v,2) ~= 2^n-1
    error('Dimension of v should be 2^n-1');
end
v_a = [];
for s=1:2^n-1
    N_S = not_S(s,n); %коалиция N\S в виде уникального числа
    if N_S == 0 %случай пустой коалиции
        v_a = [v_a, alpha*v(s)+(1-alpha)*v(2^n-1)];
    else
        v_a = [v_a, alpha*v(s)+(1-alpha)*(v(2^n-1)-v(N_S))];
    end
end
```

2. Вычисление [0,1]-N-ядра и SM-ядра:

```
function [n, X, v] = general_nucl(filename,step,alpha1,alpha2)
%Считает alpha-Nядро- для разных alpha с заданным шагом step и выводит
%значения в файл [0-1]-nucleolus.txt
%Выводит график для x3- игроков
%INPUT:
%filename - файл, где первая строка - количество игроков, а последующие -
%коалиции и соответствующие им значения характеристической функции
%step - шаг из интервала [0,1]
%alpha1 - левая граница интервала, по умолчанию 0
%alpha1 - правая граница интервала, по умолчанию 1
if step > 1 || step < 0
    error('Step should be in range [0,1]');
end
[v,n] = input_file(filename); %получаем из файл хар фю- и число игроков
if size(v,2) ~= 2^n-1
    error('Dimension of v should be 2^n-1');
```

```
end
if nargin < 3
    alpha1 = 0;
    alpha2 = 1;
end
X = [];
ALPHA = [];
fid = fopen('[0-1]-nucleolus.txt','w'); %файл значений alpha и X
fprintf(fid,'%4s\t %3s\t %3s\t %3s\t %3s\t %3s\t\n','alpha','x1','x2','x3','x4
    ','...');
for alpha=alpha1:step:alpha2
    v_a = v_alpha(alpha,v,n); %строим игру v^alpha для подсчета alpha-Nядра-
    pren = PreNucl(v_a);
    X = [X; pren];
    ALPHA = [ALPHA; alpha];
end
for j = 1:size(ALPHA,1) %вывод в файл alpha,X
    fprintf(fid,'%3.3f\t',ALPHA(j));
    for k = 1:n
        fprintf(fid,'%3.4f\t',X(j,k));
    end
    fprintf(fid,'\n');
end
fclose(fid);

%график для n=3
if n == 3
    plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3),'-o')
    max_x = max(v_a);
    %axis([0 max_x 0 max_x 0 max_x])
    grid on
end
end
```

Приложение 2. [0,1]-N-ядро игры 3-х лиц

alpha	x1	x2	x3
0.000	3.0000	2.5000	3.5000
0.020	3.0000	2.5000	3.5000
0.040	3.0000	2.5000	3.5000
0.060	3.0000	2.5000	3.5000
0.080	3.0000	2.5000	3.5000
0.100	3.0000	2.5000	3.5000
0.120	3.0000	2.5000	3.5000
0.140	3.0000	2.5000	3.5000
0.160	3.0000	2.5000	3.5000
0.180	3.0000	2.5000	3.5000
0.200	3.0000	2.5000	3.5000
0.220	3.0000	2.5000	3.5000
0.240	3.0000	2.5000	3.5000
0.260	3.0100	2.4900	3.5000
0.280	3.0300	2.4700	3.5000
0.300	3.0500	2.4500	3.5000
0.320	3.0700	2.4300	3.5000
0.340	3.0900	2.4100	3.5000
0.360	3.1100	2.3900	3.5000
0.380	3.1267	2.3667	3.5067
0.400	3.1333	2.3333	3.5333
0.420	3.1400	2.3000	3.5600
0.440	3.1467	2.2667	3.5867
0.460	3.1533	2.2333	3.6133
0.480	3.1600	2.2000	3.6400
0.500	3.1667	2.1667	3.6667
0.520	3.1733	2.1333	3.6933
0.540	3.1800	2.1000	3.7200
0.560	3.1867	2.0667	3.7467
0.580	3.1933	2.0333	3.7733
0.600	3.2000	2.0000	3.8000
0.620	3.1900	2.0000	3.8100
0.640	3.1800	2.0000	3.8200
0.660	3.1700	2.0000	3.8300
0.680	3.1600	2.0000	3.8400
0.700	3.1500	2.0000	3.8500
0.720	3.1400	2.0000	3.8600
0.740	3.1300	2.0000	3.8700
0.760	3.1200	2.0000	3.8800
0.780	3.1100	2.0000	3.8900
0.800	3.1000	2.0000	3.9000
0.820	3.0900	2.0000	3.9100
0.840	3.0800	2.0000	3.9200
0.860	3.0700	2.0000	3.9300
0.880	3.0600	2.0000	3.9400
0.900	3.0500	2.0000	3.9500
0.920	3.0400	2.0000	3.9600
0.940	3.0300	2.0000	3.9700
0.960	3.0200	2.0000	3.9800
0.980	3.0100	2.0000	3.9900
1.000	3.0000	2.0000	4.0000

Приложение 3. Проверка RGP

1. Построение новой характеристической функции v_S^x игры в редуцированной форме (S, v_S^x):

```
function [v_rx] = reduced_game_maschler(S,alpha,v,n)
%Строит игру v_S^x в редуцированной форме по Дэвису и Машлеру
%INPUT:
%S = [] - коалиция, по отношению к которой строится редуцированная игра
%alpha - параметр для подсчета alpha-Nядра-
%v = [] - характеристическая функция исходной игры
%n - число игроков
%OUTPUT:
%v_rx - новая характеристическая функция для игры в редуцированной форме
if (alpha > 1) || (alpha < 0)
    error('Alpha should be in range [0,1]');
end
if size(v,2) ~= 2^n-1
    error('Dimension of v should be 2^n-1');
end
if (size(S,2) > n) || (size(S,2) < 1)
    error('S should include minimum 2 and maximum n players in range [1,n]');
end
for i=1:size(S,2) %проверка на включение в интервал и повторы
    if S(i) < 1 || S(i) > n
        error('Coalition members should be in range [1,n]');
    end
    for j=i+1:size(S,2)
        if S(i) == S(j)
            error('There should be no repetition in colaition members');
        end
    end
end
s = 0; %число, определяющее S
for i=1:size(S,2)
    s = s + 2^(S(i)-1);
end
N_S = not_S(s,n); %число, определяющее N\S

%считаем alpha-Nядро- для исходной игры
v_a = v_alpha(alpha,v,n);
X = PreNucl(v_a);

%строим игру v_rx
v_rx = [];
for t=1:2^n-1
```

```
        if t==s
            v_rx = [v_rx, v(2^n-1)-x_S(X,N_S,n)];
        else
            v_rx = [v_rx, v_max_Q(X,v,t,N_S,n)];
        end
    end
end
```

2. Проверка свойства согласованности по Дэвису и Машлеру для α-N-ядра:

```
function[check, X_S] = RGP_maschler(S,alpha,v,n)
%Проверяет выполнение свойства согласованности по Дэвису и Машлеру для alpha-N-ядра-
%INPUT:
%S = [] - коалиция, по отношению к которой строится редуцированная игра
%alpha - параметр для подсчета alpha-N-ядра-
%v = [] - характеристическая функция исходной игры
%n - число игроков
%OUTPUT:
%check - переменная типа boolean, 1 - если свойство выполняется, 0 - иначе
if (alpha > 1) || (alpha < 0)
    error('Alpha should be in range [0,1]');
end
if size(v,2) ~= 2^n-1
    error('Dimension of v should be 2^n-1');
end
if (size(S,2) > n) || (size(S,2) < 1)
    error('S should include minimum 2 and maximum n players in range [1,n]');
end
for i=1:size(S,2) %проверка на включение в интервал и повторы
    if S(i) < 1 || S(i) > n
        error('Coalition members should be in range [1,n]');
    end
    for j=i+1:size(S,2)
        if S(i) == S(j)
            error('There should be no repetition in colaition members');
        end
    end
end
v_a = v_alpha(alpha,v,n);
X = PreNucl(v_a); %считаем alpha-N-ядро- для исходной игры
v_rx = reduced_game_maschler(S,alpha,v,n); %игра в редуцированной форме

s = 0; %число, определяющее S
for i=1:size(S,2)
    s = s + 2^(S(i)-1);
end
```

```
S_bin = dec2bin(s,n); %S в бинарном

%находим все коалиции, содержащиеся в S
all_S = contained_coal(S_bin,n);

v_S = [];
for i=1:size(all_S,2)
    v_S = [v_S, v_rx(all_S(i))];
end
if size(S,2) == 1
    X_S = v_S(1); %решение для одного человека
else
    X_S = PreNucl(v_S);
end
check = 1;
eps = 1e-14; %tolerance
for i=1:size(S,2)
    if (X_S(i) - X(S(i))) > eps
        check = 0;
        break
    end
end
end
```

3. Проверка RGP для игры 3-х лиц. Уточнение результатов.

```
n =  3

Remained coalition S:     1    2
 alpha    1 or 0  0.600       0
0.601       0
0.602       0
0.603       0
0.604       0
0.605       0
0.606       0
0.607       0
0.608       0
0.609       0

... % все alpha в этом интервале также = 0

0.689       0
0.690       0
0.691       0
0.692       0
0.693       0
0.694       0
0.695       0
0.696       0
0.697       0
0.698       0
0.699       0
0.700       1
```

4. Проверка RGP для игры 5-ти лиц

```
 n =   5

Remained  coalition  S:      1    2
 alpha    1  or  0
0.001       0
0.002       0
0.003       0
0.004       0
0.005       0
0.006       0
0.007       0
0.008       0
0.009       0
0.010       0

... % все alpha в этом интервале также = 0

0.990       0
0.991       0
0.992       0
0.993       0
0.994       0
0.995       0
0.996       0
0.997       0
0.998       0
0.999       0
1.000       1
```

5. Проверка RGP для игры 3-х лиц

```
n =   3

Remained  coalition  S:      1    2
 alpha    1  or  0
0.100       0
0.200       0
0.300       0
0.400       0
0.500       0
0.600       0
0.700       0
0.800       0
0.900       0
1.000       1

Remained  coalition  S:      1    3
 alpha    1  or  0
0.100       1
0.200       1
0.300       1
0.400       1
0.500       1
0.600       1
0.700       1
0.800       1
0.900       1
1.000       1
```

Remained coalition S: 2 3

alpha	1 or 0
0.100	0
0.200	0
0.300	0
0.400	0
0.500	0
0.600	0
0.700	0
0.800	0
0.900	0
1.000	1

Remained coalition S: 1 2 3

alpha	1 or 0
0.100	0
0.200	0
0.300	0
0.400	0
0.500	0
0.600	0
0.700	0
0.800	0
0.900	0
1.000	1

Приложение 4. Проверка CON

1. Построение новой характеристической функции v_S^σ игры в редуцированной форме (S, v_S^σ):

```
function [v_rsigma] = reduced_game_mascolell(S,alpha,v,n)
%Строит игру v_S^sigma в редуцированной форме по МасКолеллу–
%INPUT:
%S = [] – коалиция, по отношению к которой строится редуцированная игра
%alpha – параметр для подсчета alpha–Nядра–
%v = [] – характеристическая функция исходной игры
%n – число игроков
%OUTPUT:
%v_rsigma – новая характеристическая функция для игры в редуцированной форме
if (alpha > 1) || (alpha < 0)
    error('Alpha should be in range [0,1]');
end
if size(v,2) ~= 2^n-1
    error('Dimension of v should be 2^n-1');
end
if (size(S,2) > n) || (size(S,2) < 1) %ДОБАВИТЬ CHECK ПО ВКЛЮЧЕНИЮ
    error('S should include minimum 2 and maximum n players in range [1,n]');
end
for i=1:size(S,2) %проверка на включение в интервал и повторы
    if S(i) < 1 || S(i) > n
        error('Coalition members should be in range [1,n]');
    end
    for j=i+1:size(S,2)
        if S(i) == S(j)
            error('There should be no repetition in colaition members');
        end
    end
end

%считаем alpha–Nядро– для исходной игры
v_a = v_alpha(alpha,v,n);

s = 0; %число, определяющее S
for i=1:size(S,2)
    s = s + 2^(S(i)-1);
end
n_s = not_S(s,n); %число, определяющее N\S

%строим игру v_rx
v_rsigma = [];
for t=1:2^n-1
```

```
    tcupn_s = coal_union(t,n_s,n);
    tcupn_s;
    v_rsigma = [v_rsigma, v_a(tcupn_s) - sum_sigma(tcupn_s,n_s,v_a,n)];
    v_rsigma;
end
end
```

2.Проверка CON для игры 3-х лиц

```
n =   3

Remained coalition S:      1    2
 alpha    1 or 0
0.000       0
0.100       0
0.200       0
0.300       0
0.400       0
0.500       1
0.600       0
0.700       0
0.800       0
0.900       0
1.000       0

Remained coalition S:      1    3
 alpha    1 or 0
0.000       0
0.100       0
0.200       0
0.300       0
0.400       0
0.500       1
0.600       0
0.700       0
0.800       1
0.900       1
1.000       1

Remained coalition S:      2    3
 alpha    1 or 0
0.000       1
0.100       1
0.200       1
0.300       0
0.400       0
0.500       1
0.600       0
0.700       0
0.800       0
0.900       0
1.000       0

Remained coalition S:      1    2    3
 alpha    1 or 0
0.000       1
0.100       1
0.200       1
```

```
0.300        1
0.400        1
0.500        1
0.600        1
0.700        1
0.800        1
0.900        1
1.000        1
```

3. Выдержка из результатов проверки CON для игры 5-ти лиц

```
Remained coalition S:    1  3  5
 alpha   1 or 0
0.000       0
0.100       0
0.200       0
0.300       0
0.400       0
0.500       0
0.600       0
0.700       0
0.800       0
0.900       0
1.000       0

Remained coalition S:    1  2  4  5
 alpha   1 or 0
0.000       0
0.100       0
0.200       0
0.300       0
0.400       0
0.500       0
0.600       0
0.700       0
0.800       0
0.900       0
1.000       0
```